# 模块二 常用逻辑用语（★★）

## 强化训练

1.（2022·陕西模拟·★）若 $x$，$y$ 为正实数，则“$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$”是“$\log_2 x>\log_2 y$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

**答案：** C

**解析：** 判断充分条件、必要条件，就看二者能否互推，先看充分性，即由 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$ 能否推出 $\log_2 x>\log_2 y$，

若 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，则 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}<0$，又 $x$，$y$ 为正实数，所以 $xy>0$，从而 $y-x<0$，故 $x>y>0$，

所以 $\log_2 x>\log_2 y$，故充分性成立；再看必要性，即由 $\log_2 x>\log_2 y$ 能否推出 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，

若 $\log_2 x>\log_2 y$，则 $x>y>0$，所以 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}<0$，从而 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，故必要性成立；所以选 C.



2.（2023·成都一模·★★）已知直线 $l$，$m$ 和平面 $\alpha$，$\beta$，若 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则“$l\perp m$”是“$m\perp\beta$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

**答案：** B

**解析：** 先看充分性，即由 $l\perp m$ 能否推出 $m\perp\beta$，如图 1，当 $l\perp m$ 时，$m\perp\beta$ 不成立，所以充分性不成立；再看必要性，即由 $m\perp\beta$ 能否推出 $l\perp m$，如图 2，当 $m\perp\beta$ 时，必有 $l\perp m$，所以必要性成立；故选 B.

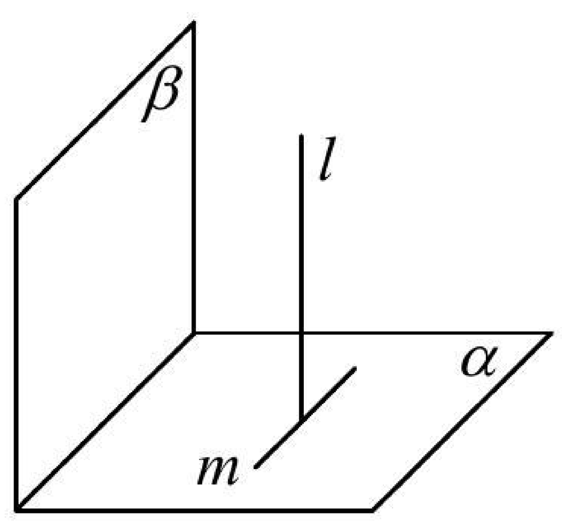


图1

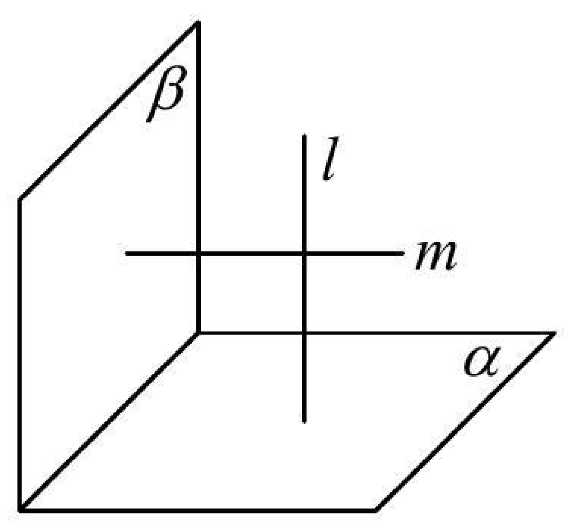


图2

3.（2023·全国甲卷·★★）“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”的（　　）

（A）充分条件但不是必要条件　（B）必要条件但不是充分条件

（C）充要条件　（D）既不是充分条件也不是必要条件

**答案：** B

**解析：** 对比两个式子发现，将 $\sin^2\beta$ 换成 $1-\cos^2\beta$，即可统一函数名，

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\cos^2\beta\Leftrightarrow\sin\alpha=\pm\cos\beta\Leftrightarrow\sin\alpha\pm\cos\beta=0$，

所以“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”必要不充分条件.

4．（2022 • 天津一模 • ★★）在等比数列$\{a_n\}$中，公比为$q$，则“$q>1$”是“$a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N}^*)$”的（　　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件　　（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

**答案：** D

**解析：** 先看充分性，当$q>1$时，要比较$a_{n+1}$和$a_n$，可作差，并将$a_{n+1}$化为$a_nq$，提公因式来看，

$a_{n+1}-a_n=a_nq-a_n=a_n(q-1)$，其中$q-1>0$，但若$a_n<0$，则$a_{n+1}-a_n<0$，即$a_{n+1}<a_n$，充分性不成立；

再看必要性，当$a_{n+1}>a_n$时，$a_{n+1}-a_n=a_nq-a_n=a_n(q-1)>0$，

若$a_n<0$，则$q-1<0$，所以$q<1$，必要性不成立；故选 D.

5．（2023 • 辽宁模拟 • ★★）“对任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$”的一个充分不必要条件是（　　）

（A）$-3<k<0$　　（B）$-3<k\le 0$　　（C）$-3<k<1$　　（D）$k>-3$

**答案：** A

**解析：** 可先求出充要条件，再选答案，平方项含字母，需讨论它为 0 的情形，

当$k=0$时，$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$即为$-\frac{3}{8}<0$，该不等式恒成立；

当$k\ne 0$时，$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}2k<0\\ \Delta=k^2-4\times 2k\times(-\frac{3}{8})<0\end{cases}$，解得：$-3<k<0$；



综上所述，$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立的充要条件是$-3<k\le 0$，

让选的是充分不必要条件，应取上述范围的一个真子集，因为$(-3,0)\quad(-3,0]$，所以选 A.

6．（2022 •安徽月考 •★★）已知集合$A=\{x\,|\,y=\ln(3x^2-7x+4)\}$，$B=\{x\,|\,27^{x+m}-9>0\}$，若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，则实数$m$的取值范围是_____.

**答案：** $(-\infty,-\frac{2}{3}]$

**解析：** 题干集合$A$和$B$中的元素不清晰，先对其进行分析，

集合$A$为函数$y=\ln(3x^2-7x+4)$的定义域，由$3x^2-7x+4>0$可得$(3x-4)(x-1)>0$，

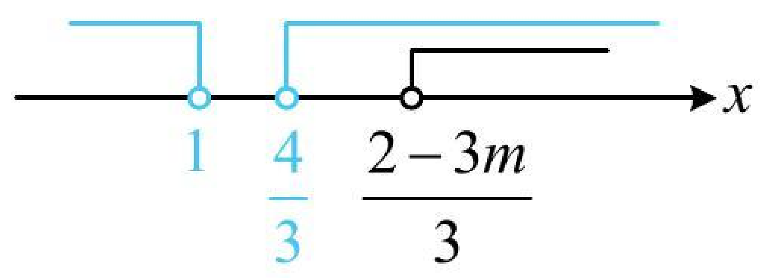
解得：$x<1$或$x>\frac{4}{3}$，所以$A=(-\infty,1)\cup(\frac{4}{3},+\infty)$；由$27^{x+m}-9>0$可得$27^{x+m}>9$　①，

要进一步求解，可将底数都化为 3，用指数函数的单调性来分析，

不等式①等价于$(3^3)^{x+m}>3^2$，即$3^{3x+3m}>3^2$，所以$3x+3m>2$，解得：$x>\frac{2-3m}{3}$，故$B=(\frac{2-3m}{3},+\infty)$；

“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件等价于“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分不必要条件，

由“小可推大，大不推小”知$B\quad A$，如图，应有$\frac{2-3m}{3}\ge\frac{4}{3}$，解得：$m\le-\frac{2}{3}$.




7.（2022 • 北京模拟 • ★）已知命题 $p:\exists x>5$，$2x^2-x+1>0$，则 $p$ 的否定为（　　）

（A）$\forall x\le 5$，$2x^2-x+1\le 0$　　（B）$\forall x>5$，$2x^2-x+1\le 0$

（C）$\exists x>5$，$2x^2-x+1\le 0$　　（D）$\exists x\le 5$，$2x^2-x+1>0$

答案：B

解析：否定存在量词命题，先“存在”改“任意”，再否定结论，命题 $p$ 的否定为 $\forall x>5$，$2x^2-x+1\le 0$.

8.（2022 • 眉山模拟 • ★）命题 $p:\forall x\in\mathbf{Q}$，$x^2\in\mathbf{Q}$ 的否定为（　　）

（A）$\forall x\notin\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$　　（B）$\forall x\in\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$　　（C）$\exists x\notin\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$　　（D）$\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$

答案：D

解析：否定全称量词命题，先“任意”改“存在”，再否定结论，命题 $p$ 的否定为 $\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$.

9.（2022 • 玉林模拟 • ★★）若命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2(a+1)x+1<0$ 是假命题，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

答案：$[-2,0]$

解析：正面考虑不易，可从反面来看，命题 $p$ 是假命题等价于其否定为真命题，

命题 $p$ 的否定为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2(a+1)x+1\ge 0$，所以 $\Delta=4(a+1)^2-4\le 0$，解得：$-2\le a\le 0$.

10.（2022 • 承德模拟 • ★★★）命题 $p:\exists x\in[-1,1]$，使 $x^2+1<a$ 成立；命题 $q:\forall x>0$，$ax<x^2+1$ 恒成立. 若命题 $p$ 与 $q$ 有且只有一个为真命题，则实数 $a$ 的取值范围是_____.



答案：$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

解析：$p$ 与 $q$ 有且只有一个为真命题有 $p$ 假 $q$ 真、$p$ 真 $q$ 假两种情况，分别讨论即可，

当 $p$ 为假命题，$q$ 为真命题时，其中 $p$ 为假命题等价于 $p$ 的否定“$\forall x\in[-1,1]$，$x^2+1\ge a$”为真命题，

因为 $x^2+1$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值为 1，所以 $a\le 1$ ①，

对命题 $q$，$\forall x>0$，$ax<x^2+1\Leftrightarrow a<x+\dfrac{1}{x}$，因为 $x+\dfrac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

所以 $(x+\dfrac{1}{x})_{\min}=2$，因为 $a<x+\dfrac{1}{x}$ 对任意的 $x>0$ 都成立，所以 $a<2$，结合①可得 $a\le 1$；

当 $p$ 为真命题，$q$ 为假命题时，无需重复计算，在上面 $p$ 为假，$q$ 为真的结果中各自取补集即可，

由前面的分析过程知 $p$ 为假命题时 $a\le 1$，所以 $p$ 为真命题时应有 $a>1$ ②，

同理，$q$ 为真命题时，$a<2$，所以 $q$ 为假命题时，应有 $a\ge 2$，结合②可得 $a\ge 2$；

综上所述，实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

【反思】当两个命题一真一假时，可选其中一种情况来求参数范围，另一种情形直接在此基础上各自取补集再考虑即可.